Demostraciones a ejercicios propuestos

Prof. Luis Pineda

Última actualización: Febrero, 2.010

1 Demostrar $A \subseteq B \leftrightarrow A - B = \emptyset$

1.1 Demostrar $A \subseteq B \rightarrow A - B = \emptyset$

(1) Asumimos que $A \subseteq B$ es verdadero

(2) $A \subseteq B$ equivale a decir que para todos los elementos se cumple que si un elemento está en A entonces está en B. Por definición del operador implicación y por propiedad de los cuantificadores lógicos, esto es lo mismo que decir que no existen elementos que estén en A y que no estén en B.

(3) El conjunto $A - B$ es el conjunto de todos los elementos que están en A y no están en B.

(4) Por (2) y (3) sabemos que $A-B$ está vacío, ya que no existen elementos que cumplan la proposición que lo define. Por lo tanto al asumir $A \subseteq B$ verdadero deducimos que $A - B = \emptyset$ también lo es$\blacksquare$

1.2 Demostrar $A - B = \emptyset \rightarrow A \subseteq B$

(1) Asumimos que $A - B = \emptyset$ es verdadero

(2) El conjunto $A - B$ es el conjunto de todos los elementos que están en A y no están en B.

(3) Por (1) y (2) sabemos que no existen elementos que están en A y que no están en B, ya que el conjunto de todos los elementos que cumplen esa proposición es vacío.

(4) La proposición (3) es equivalente a decir que decir que para todos los elementos se cumple que si un elemento está en A entonces está en B (def. del op. implicación y propiedad de los cuantif. lóg.). Esto equivale a decir que $A \subseteq B$. Por lo tanto al asumir $A - B = \emptyset$ verdadero llegamos a la conclusión que $A \subseteq B$ también lo es$\blacksquare$

2 Demostrar $A - (A - B) = A \cap B$

$$
\begin{aligned}
A. - (A - B) &= A \cap \overline{(A - B)} && \text{(definición de diferencia de conjuntos)} \\
&= A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} && \text{(definición de diferencia de conjuntos)} \\
&= A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) && \text{(ley de DeMorgan)} \\
&= \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) && \text{(propiedad distributiva)}
\end{aligned}
$$

(1) De las igualdades mostradas arribas podemos concluir que $A - (A - B) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B)$.

(2) Para todo conjunto A, se cumple que $\left(A \cap \overline{A}\right) = \emptyset$ (propiedad de la interesección). Por lo tanto, $\left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B)$.

(3) Para todo conjunto A, se cumple que $\emptyset \cup A = A$ (propiedad de la unión). Por lo tanto, $\left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$.

(4) Por (1) y (3) podemos concluir que $A - (A - B) = A \cap B$■

3 Demostrar $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Esta proposición es más fácil de demostrar si se empieza por el lado derecho:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \quad \text{(definición de diferencia de conjuntos)} \\
&= (A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) \quad \text{(ley de DeMorgan)} \\
&= \left((A \cap B) \cap \overline{A}\right) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) \quad \text{(propiedad distributiva)} \\
&= \left((A \cap \overline{A}) \cap B\right) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) \quad \text{(propiedad asociativa)} \\
&= (\emptyset \cap B) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) \quad \text{(debido a que para todo } A,\ A \cap \overline{A} = \emptyset) \\
&= \emptyset \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) \quad \text{(debido a que para todo } A,\ A \cap \emptyset = \emptyset) \\
&= (A \cap B) \cap \overline{C} \quad \text{(debido a que para todo } A,\ A \cup \emptyset = A) \\
&= A \cap \left(B \cap \overline{C}\right) \quad \text{(propiedad asociativa de la intersección)} \\
&= = A \cap (B - C) \quad \text{(definición de diferencia de conjuntos)}
\end{aligned}$$

Estas igualdades demuestran que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$■

4 Demostrar $A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$

Tanto esta demostración como la siguiente requieren demostrar previamente que $A \subseteq B \to A \cup C \subseteq B \cup C$. La demostración se ofrece en la sección 4.1.

Sea U el conjunto universal. Entonces podemos reescribir $A \cap B$ como:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= (A \cap B) \cap U \quad \text{(debido a que para todo conjunto } A,\ A \cap U = A) \\
&= (A \cap B) \cap \left(C \cup \overline{C}\right) \quad \text{(debido a que para todo conjunto } A,\ A \cup \overline{A} = U) \\
&= ((A \cap B) \cap C) \cup \left((A \cap B) \cap \overline{C}\right) \quad \text{(propiedad distributiva)} \\
&= ((A \cap C) \cap B) \cup \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A\right) \quad \text{(propiedad asociativa)}
\end{aligned}$$

(1) De las igualdades mostradas arribas tenemos que $A \cap B = ((A \cap C) \cap B) \cup \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A\right)$

(2) Por propiedad de la intersección $A \cap B \subseteq A$ deducimos que $(A \cap C) \cap B \subseteq A \cap C$

(3) Por propiedad de la intersección $A \cap B \subseteq A$ deducimos que $\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A \subseteq B \cap \overline{C}$

(4) Por (2) y por la propiedad demostrada en 4.1 deducimos que $((A \cap C) \cap B) \cup \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A\right) \subseteq (A \cap C) \cup \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A\right)$

(5) Por (3) y por la propiedad demostrada en 4.1 deducimos que $(A \cap C) \cup \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A\right) \subseteq (A \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$

(6) Por (4), (5) y por transitividad de la inclusión tenemos que $((A \cap C) \cap B) \cup \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cap A\right) \subseteq (A \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$

(7) Finalmente por (1) y (6) concluimos que $A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup \left(B \cap \overline{C}\right)$ ■

4.1 Demostrar $A \subseteq B \rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

(1) Suponemos que $A \subseteq B$ es verdadero.

(2) Dividimos los elementos $x \in A \cup C$ en tres subconjuntos disjuntos: $X_1 = \{x \mid x \in A \wedge x \notin C\}$, $X_2 = \{x \mid x \in C \wedge x \notin A\}$ y $X_3 = \{x \mid x \in A \wedge x \in C\}$.

(3) Todos los elementos de los conjuntos X_1 y X_3 pertenecen al conjunto A, y por (1), deducimos que también pertencen a B.

(4) Por propiedad de la unión $B \subseteq B \cup C$, por transitividad de la inclusión y por (3) deducimos que todos lo elementos de X_1 y X_3 pertenecen a $B \cup C$.

(5) Los elementos del conjunto X_2 pertenecen a C. Entonces, por la propiedad de la unión $C \subseteq B \cup C$ y por transitividad de la inclusión deducimos que todos los elementos de X_2 pertenecen a $B \cup C$.

(6) Por (2), (4) y (5) deducimos que todos los elementos de $A \cup C$ pertenecen a $B \cup C$. Es decir $A \cup C \subseteq B \cup C$■

5 Demostrar $(A \cup C) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) \subseteq A \cup B$

$$
\begin{aligned}
(A \cup C) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) &= ((A \cup C) \cap B) \cup \left((A \cup C) \cap \overline{C}\right) && \text{(propiedad distributiva)} \\
&= ((A \cap C) \cap B) \cup \left(\left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{C}\right)\right) && \text{(propiedad distributiva)} \\
&= ((A \cap C) \cap B) \cup \left(\left(A \cap \overline{C}\right) \cup \emptyset\right) && \text{(debido a que para todo } A,\ A \cap \overline{A} = \emptyset \\
&= ((A \cap C) \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) && \text{(debido a que para todo } A,\ A \cup \emptyset = A
\end{aligned}
$$

(1) De las igualdades mostradas arriba tenemos que $(A \cup C) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) = ((A \cap C) \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right)$

(2) Dado que para cualesquiera conjuntos A, B se cumple $A \cap B \subseteq B$, podemos afirmar que $(A \cup C) \cap B \subseteq B$

(3) De la misma forma, podemos afirmar que $A \cap \overline{C} \subseteq A$

(4) Por (2) y por la propiedad demostrada en la sección 4.1 deducimos que $((A \cap C) \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \subseteq B \cup \left(A \cap \overline{C}\right)$

(5) Por (3) y por la propiedad demostrada en la sección 4.1 deducimos que $B \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \subseteq B \cup A$

(6) Por (4), (5) y por transitividad de la inclusión deducimos que $((A \cap C) \cap B) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) \subseteq A \cup B$

(7) Finalmente, por (1) y (6) tenemos que $(A \cup C) \cap \left(B \cup \overline{C}\right) \subseteq A \cup B$■

6 Demostrar $A \subseteq B \rightarrow \wp(A) \subseteq \wp(B)$

La demostración se hace por contraposición:

(1) Supongamos que $A \subseteq B \wedge \wp(A) \nsubseteq \wp(B)$ es verdadero.

(2) La proposición (1) implica que existe un conjunto X que pertenece a $\wp(A)$ y que no pertenece a $\wp(B)$

(3) Por la definición de conjunto de partes y por (2) deducimos que X es subconjunto de A pero no es subconjunto de B

(4) Por la definición de subconjunto sabemos que todos los elementos de X pertenecen al conjunto A. De forma similar, sabemos que X posee elementos que no están en B.

(5) Por (4) llegamos a la conclusión que existen elementos que pertenecen al conjunto A que no pertenecen al conjunto B, ya que cualquiera de los elementos de X que no está en B está en A.

(6) La proposición (5) implica que A no es subconjunto de B, ya que algunos de sus elementos no están en B. Pero esto contradice la proposición (1) y por lo tanto nuestra suposición $\wp(A) \nsubseteq \wp(B)$ es falsa ■

7 Demostrar $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$

Consideremos un elemento X que pertenezca al conjunto $\wp(A) \cup \wp(B) = \{X|X \in \wp(A) \vee X \in \wp(B)\}$

(1) Por la definición de la unión de conjuntos, X pertenece a uno de los siguientes tres subconjuntos disjuntos: $Z_1 = \{z|z \in \wp(A) \wedge z \notin \wp(B)\}$, $Z_2 = \{z|z \in \wp(B) \wedge z \notin \wp(A)\}$ o $Z_3 = \{z|z \in \wp(A) \wedge z \in \wp(B)\}$

(2) Aplicando la definición de conjunto de partes, por (1) deducimos que X cumple una de las siguientes proposiciones $p_1 : X \subseteq A \wedge X \nsubseteq B$ (si pertenece a Z_1), $p_2 : X \subseteq B \wedge X \nsubseteq A$ (si pertenece a Z_2) o $p_3 : X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ (si pertenece a Z_3)

(3) Si X cumple p_1 o p_3 entonces es subconjunto de A. Aplicando la propiedad $A \subseteq A \cup B$ y la transitividad de la inclusión deducimos luego que $X \subseteq A \cup B$

(4) Si X cumple p_2 entonces es subconjunto de B. Aplicando la propiedad $B \subseteq A \cup B$ y la transitividad de la inclusión deducimos luego que $X \subseteq A \cup B$

(5) Por (2), (3) y (4) deducimos que $X \subseteq A \cup B$. Y por definición del conjunto de partes $X \in \wp(A \cup B)$. Esto demuestra que si X está en $\wp(A) \cup \wp(B)$ entonces está en $\wp(A \cup B)$■

8 Demostrar $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$

(1) Primero notemos que $\wp(A) \cap \wp(B) = \{X|X \in \wp(A) \wedge X \in \wp(B)\} = \{X|X \subseteq A \wedge X \subseteq B\}$. Es decir $\wp(A) \cap \wp(B)$ es el conjunto de todos los conjuntos X que son subconjuntos de A y de B

(2) Por (1) y la definición de subconjunto, $\wp(A) \cap \wp(B)$ es el conjunto de todos los conjuntos X cuyos elementos están todos en A y cuyos elementos están todos en B. Por lo tanto, $\wp(A) \cap \wp(B)$ es el conjunto de todos los conjuntos X cuyos elementos están tanto en A como en B

(3) Los elementos que están tanto en A como en B son elementos que pertenecen a $A \cap B$. Por lo tanto, por (2), $\wp(A) \cap \wp(B)$ es el conjunto de todos los conjuntos X cuyos elementos están en $A \cap B$

(4) Si todo elemento de un conjunto X está en $A \cap B$ entonces, por definición de subconjunto, $X \subseteq A \cap B$. Por lo tanto, por (3), $\wp(A) \cap \wp(B)$ es el conjunto de todos los conjuntos X que son subconjuntos de $A \cap B$. Pero esto no es más que el conjunto $\wp(A \cap B)$. Por lo tanto, el conjunto $\wp(A) \cap \wp(B)$ es el conjunto $\wp(A \cap B)$■